Лекция 3 «Дифференциальное уравнение равновесия жидкости (уравнение равновесия Эйлера)»

Цель: Дайте определение гидростатики. Приведите свойства гидростатического давления. Напишите дифференциальное уравнение равновесия жидкости (уравнения равновесия Эйлера).

Краткий конспект лекции: Гидростатика – раздел гидравлики, в котором изучают законы, которым подчиняется жидкость, находящаяся в состоянии абсолютного или относительного покоя.

Если жидкость находится в состоянии покоя, то отсутствует перемещение частиц друг относительно друга и относительно сосуда, в котором она находится. Если при этом сам сосуд неподвижен относительно земли, то это состояние абсолютного покоя (рис. 1).

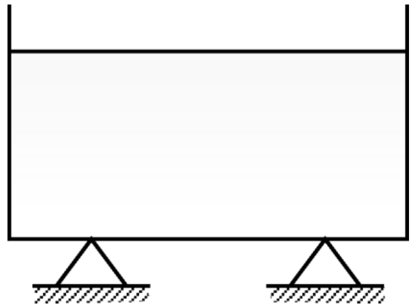

Рис. 1. Абсолютный покой жидкости

Если сосуд перемещается в пространстве относительно земли, то это случай относительного покоя (рис. 2).

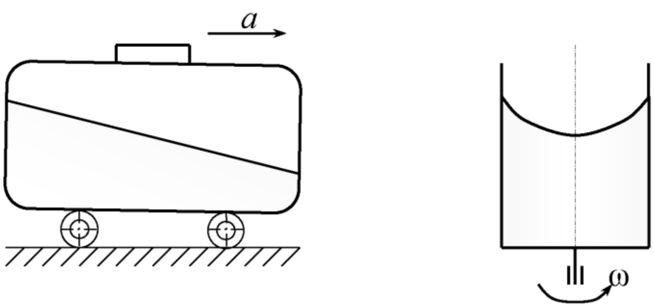

Рис. 2. Относительный покой жидкости

Свойства гидростатического давления

Гидростатическим давлением называют давление, которое действует в покоящейся жидкости. Рассмотрим свойства гидростатического давления.

Свойство 1

Гидростатическое давление всегда направлено по нормали к площадке, на которую оно действует и внутрь рассматриваемого объёма. Это свойство не нуждается в доказательстве и вытекает из определения давления, как нормального сжимающего напряжения.

Свойство 2

В любой точке покоящейся жидкости величина гидростатического давления по всем направлениям одинакова. Следовательно, давление не зависит от ориентации площадки, для которой оно вычислено.

Дифференциальное уравнение равновесия жидкости (уравнения равновесия Эйлера)

Выделим в объёме жидкости, находящейся в состоянии относительно покоя, элементарный прямоугольный параллелепипед с ребрами Δx, Δy, Δz, параллельными осям координат x, y, z (рис. 3).

На выделенный объем будут действовать массовые и поверхностные силы. Из массовых сил будут действовать сила тяжести $\Delta\vec{G}$ и силы инерции $\Delta\vec{J}$, возникающие в общем случае относительного покоя.

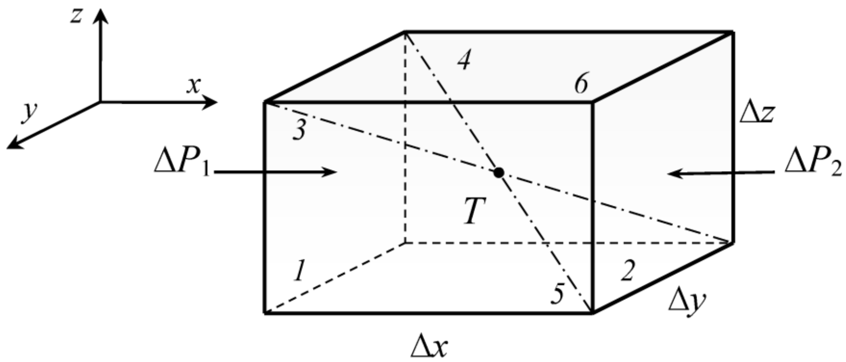

Рис. 3. Элементарный прямоугольный параллелепипед

Проекции массовой силы $\Delta M\vec{A}$ на оси координат:

$$\begin{aligned} X\Delta M &= \Delta G_x + \Delta J_x; \\ Y\Delta M &= \Delta G_y + \Delta J_y; \\ Z\Delta M &= \Delta G_z + \Delta J_z; \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\Delta M = \rho\Delta x\Delta y\Delta z$ – масса жидкости в выделенном объёме; X, Y, Z – проекции на оси координат главного вектора ускорения результирующей массовой силы, приходящейся на единицу массы (численно равны сумме проекций плотностей массовых сил тяжести и инерции).

Кроме массовых сил на выделенный объём будут действовать поверхностные силы – силы давления. Они направлены перпендикулярно соответствующим граням внутрь рассматриваемого объема. При этом, поскольку мы рассматриваем элементарный объем жидкости, можно считать, что по всей поверхности грани давление одинаково. Пронумеруем грани от 1 до 6. Давление в выделенном объеме является функцией координат:

$$p = f(x, y, z).$$

Если давление в центре грани 1 равно p, то давление, действующее на грань 2, будет равно p, то давление, действующее на грань 2, будет равно $p + \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x$. Силы давления, действующие на грани 1 и 2:

$$\Delta P_1 = p\Delta y\Delta z; \tag{2}$$

$$\Delta P_2 = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z. \tag{3}$$

Поскольку параллелепипед находится в равновесии, то сумма проекций на координатные оси всех сил, действующих на него, равна нулю. Спроектируем поверхностные и массовые силы на ось x:

$$\Delta P_1 - \Delta P_2 + X\Delta M = 0. \tag{4}$$

Подставим в это уравнение полученные выше выражения для ΔP_1, ΔP_2, ΔM:

$$p\Delta y\Delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z + X\rho\Delta x\Delta y\Delta z = 0 \tag{5}$$

Раскрывая скобки, получим:

$$p\Delta y\Delta z - p\Delta y\Delta z - \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z + X\rho\Delta x\Delta y\Delta z = 0. \tag{6}$$

Проведя сокращения и разделив все члены уравнения на $\Delta x\Delta y\Delta z$, получим:

$$\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \tag{7}$$

Аналогично можно представить суммы проекций всех сил на оси y и z. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \\ Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \\ Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Система уравнений (8) называется системой дифференциальных уравнений равновесия или уравнениями равновесия Эйлера. Полученные уравнения показывают, что при равновесии жидкости массовые силы уравновешиваются соответствующими поверхностными силами.

Если умножить каждое из уравнений системы (8) соответственно на dx, dy, dz и сложить их, то получим уравнение:

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = 0. \tag{9}$$

Выражение в скобках, представляет собой полный дифференциал давления dp. Тогда уравнение равновесия может быть представлено в виде:

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = dp. \tag{10}$$

Из выражения (10) можно получить дифференциальное уравнение поверхности равного давления, на которой p = const и, следовательно, $dp = 0$:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0. \tag{11}$$

Уравнение (11) показывает, что равновесие возможно лишь в том случае, когда проекции плотности массовых сил являются производными от некоторой функции $u = u(x, y, z)$. Ее полный дифференциал

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz. \tag{12}$$

Примем $dp = -\rho du$ и по уравнению равновесия (10) получим

$$X = -\frac{\partial u}{\partial x}; Y = -\frac{\partial u}{\partial y}; Z = \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{13}$$

Функцию $u = u(x, y, z)$ называют потенциальной функцией. Силы, для которых эта функция существует, называют силами, имеющими потенциал. Следовательно, жидкость может находиться в равновесии только под действием массовых сил, имеющих потенциал, так как только такие силы удовлетворяют уравнению равновесия Эйлера.

Дифференциальные уравнения равновесия Эйлера можно выразить также системой уравнений 14:

$$\begin{cases} -\frac{dp}{\partial x} = 0 \\ -\frac{dp}{\partial y} = 0 \\ -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}. \tag{14}$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение гидростатики.
2. Приведите свойства гидростатического давления.
3. Напишите дифференциальное уравнение равновесия жидкости (уравнения равновесия Эйлера).

Литература

1. Лекции по курсу «Основные процессы и аппараты химической технологии»: учебно-методическое пособие / составители: Ж.Т. Ешова, Д.Н. Акбаева. – Алматы: Қазақ университеті, 2017. – 392 с. – 40 экз.
2. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. – М.: Химия, 1973. – 752 с.
3. Романков П.Г., Фролов В.Ф., Флисюк О.М. Методы расчёта процессов и аппаратов химической технологии (примеры и задачи). – Санкт-Петербург: ХИМИЗДАТ, 2009. – 544 с.
4. Вайсман Н.М. Механика жидкости и газа. Гидравлика: учеб. пособие / Н.М. Вайсман, В.А. Голиков, А.А. Жарковский. − СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 222 с.